★★★

Épreuve de Maths	Royaume du Maroc	Examen National du
Filières : SMA - SMB	Ministère de l'Education Nationale	BACCALAURÉAT
Coefficient : 9	De la Formation professionnelle	Session Principale
Durée : 4 heures	de l'Eseignement supérieur & de la Recherche scientifique	Juin 2005

■ Exercice Numéro 1 : (04,00 points)

Rappel : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}}=0$; $1_{\mathbb{R}}=1$.
$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit : $(a,b)*(x,y)=\left(\dfrac{ax+by}{2};\dfrac{ay+bx}{2}\right)$; $\left|\begin{array}{l}\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\end{array}\right.$

Soit : $E=\left\{\left(m+\dfrac{1}{m};m-\dfrac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 \;;\; m\in\mathbb{R}^*\right\}$

Soit l'application définie ainsi : $\begin{array}{lccc}\varphi : & (\mathbb{R}^*,\times) & \longmapsto & (E,*)\\ & m & \longmapsto & \left(m+\dfrac{1}{m};m-\dfrac{1}{m}\right)\end{array}$

Soit : $F=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;;\; y^2=x^2-4 \;\; et \;\; x\geq 2\,\}$

0,75 **1** Montrer que $*$ est une loi de composition sur l'ensemble E.

0,50 **2 a** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,*)$.

0,75 **b** En déduire que $(E,*)$ est un groupe puis déterminer son élément neutre.

Déterminer le symétrique de l'élément $\left(m+\dfrac{1}{m}\;;\;m-\dfrac{1}{m}\right)$; $m\in\mathbb{R}^*$.

1,00 **3 a** *Montrer que* : $F=\left\{\left(m+\dfrac{1}{m};m-\dfrac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 \;;\; m>0\right\}$

1,00 **b** Montrer que $(F,*)$ est un sous-groupe du groupe $(E,*)$.

■ Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

0,50 **I** Soit p un entier naturel premier supérieur ou égal à 5.

0,50 **1** Montrer que : $p^2\equiv 1\,[3]$.

0,50 **2 a** Montrer que : $\exists\, q\in\mathbb{N}^*$; $p^2-1=4q(q+1)$.

0,50 **b** En déduire que : $p^2\equiv 1\,[8]$.

0,50 **3** Montrer que : $p^2\equiv 1\,[24]$.

0,50 **II 1** Soit $a\in\mathbb{N}^*$; $a\wedge 24=1$; Montrer que : $a^2\equiv 1\,[24]$.

0,50 **2** Étudier la véracité du prédicat suivant :

$$\exists\ (a_1,\cdots,a_{23})\ \epsilon\ \mathbb{N}^{23*}\ ;\ a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{23}^2=23997\ ;\ avec\ \begin{cases}\forall\ k\ \epsilon\ \{1,2,\cdots,23\}\\ a_k\wedge 24=1\end{cases}$$

■ Exercice Numéro 3 : (08,00 points)

I Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)\,e^{\left(\frac{-2}{x}\right)} & ;\quad \forall\, x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=2cm$.

0,25 **1 a** Montrer que f est continue à droite en zéro.

0,25 **b** Montrer que f est dérivable à droite en zéro.

0,50 **c** Montrer que f est une fonction croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

0,25 **2 a** Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 **b** Montrer que : $(\forall\, t\geq 0)\ ;\quad 0\leq e^{-t}+t-1\leq \dfrac{t^2}{2}$.

0,50 **c** Montrer que : $(\forall\, t>0)\ ;\quad \dfrac{-4}{x}\leq f(x)-x\leq \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x}$.

0,25 **d** En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote (Δ) qu'on déterminera.

0,50 **3** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) dans le repère $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

II Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\dfrac{2}{n}\right)\,e^{\frac{-2}{x}} & ;\quad \forall\, x>0\quad ;\quad n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

0,25 **1** Montrer que la fonction f_n est dérivable à droite en zéro.

0,50 **2** Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

0,50 **3 a** Montrer que : $(\forall\, n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*)\ ,(\exists!\ a_n\,\epsilon\,]0,+\infty[\,)\ :\ f_n(a_n)=\dfrac{2}{n}$

0,50 **b** Montrer que : $(\forall\, x>0)\ ,(\forall\, n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*)\ :\ f_{n+1}(x)-\dfrac{2}{n+1}>f_{n+1}(x)-\dfrac{2}{n}$

0,75 **c** En déduire que la suite $(a_n)_{n\epsilon\,\mathbb{N}^*}$ est convergente on pose a sa limite

0,50 **d** Montrer que : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $n\, a_n = 2\, e^{\left(\frac{2}{a_n}\right)} - 2$.

0,50 **e** Montrer que : $a = 0$.

III Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

0,25 **1** **a** Montrer que : $(\forall\, x > 0)$; $x\, f(x) \leq F(x) \leq x\, f(2x)$.

0,25 **b** Calculer la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 **2** **a** Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

b Puis montrer que : $\begin{cases} F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)\, e^{\frac{1}{x}}\right) & ; \ \forall\, x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$

0,50 **3** Dresser le tableau de variations de la fonction F .

■ Exercice Numéro 4 : (04,50 points)

0,25 On pose : $f(z) = \dfrac{iz - 1}{(z+1)^2}$; $z \neq -1$

1,00 **1** **a** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(iy) = iy$.

0,50 **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = z$.

2 Soient z_0 ; z_1 ; z_2 les solutions de l'équation (E) .

On suppose que : $\mathcal{R}e(z_0) = 0$ et $\mathcal{R}e(z_1) > Re(z_2)$.

0,75 **a** Vérifier que : $z_1 + 1 = e^{\left(\frac{i11\pi}{6}\right)}$ et $z_2 + 1 = e^{\left(\frac{i7\pi}{6}\right)}$.

0,25 **b** En déduire une écriture exponentielle des nombres z_1 et z_2 .

3 Dans tout ce qui suit, on prendra : $z = e^{i\alpha}$; $0 \leq \alpha < \pi$.

0,25 **a** Montrer que : $\overline{f(z)} = i\, z\, f(z)$.

0,75 **b** Déterminer α sachant que : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$.

0,25 **c** Déterminer $(r,\varphi)\ \epsilon\ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $f(z) = r\, e^{i\varphi}$.

0,50 **4** Déterminer z tel que $|z| = 1$ et $\mathcal{R}e\big(f(z)\big) = \frac{1}{2}$.